<u>OSTRUZIONI SUI GRAFI</u>

Alcune ostruzioni per l'esistenza di grafi con dato score

1) Vale il seguente lemma

Lemma 1. *Se $G = (V, E)$ è un grafo finito con n vertici allora*

$$\deg(v) \leq n - 1, \qquad \forall v \in V.$$

Dal lemma segue che se in un vettore $d = (d_1, \ldots, d_n)$ con n componenti esiste almeno una componente d_i maggiore di $n - 1$, NON esiste un grafo di score d.

Esempio. Il vettore

$$d = (1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 8)$$

non può essere lo score di un grafo perché ha 8 componenti di cui una maggiore di $8 - 1$.

2) Se in un vettore d con n componenti, scritto in forma canonica,

$$d = (d_1, \ldots, d_n)$$

la componente d_n è uguale al numero di vertici meno 1, cioè

$$d_n = n - 1$$

allora, affinché d sia lo score di un grafo, necessariamente dovrà essere

$$d_i \geq 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Esempio. Il vettore

$$d = (0, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 7)$$

non può essere le score di un grafo.

3) Se in un vettore d con n componenti, scritto in forma canonica,

$$d = (d_1, \ldots, d_n)$$

ci sono due componenti di grado $n-1$

$$d_{n-1} = n-1, \qquad d_n = n-1$$

allora, affinché d sia lo score di un grafo, necessariamente dovrà essere

$$d_i \geq 2, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Esempio. Il vettore

$$d = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8)$$

non può essere le score di un grafo.

4) Dalla relazione fondamentale tra i gradi dei vertici e il numero di lati per un grafo finito

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\,|E|$$

segue il seguente risultato:

Lemma 2 (delle strette di mano). *Se $G = (V, E)$ è un grafo finito allora il numero di vertici di grado dispari è pari.*

Pertanto, se un vettore con n componenti

$$d = (d_1, \ldots, d_n)$$

non verifica il lemma delle strette di mano, non esiste un grafo di score d.

Esempio. Il vettore

$$d = (1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 7)$$

non verifica il lemma delle strette di mano, infatti

$$|\{v \in V \mid \deg(v) \text{ è dispari }\}| = 5$$

dunque, non esiste un grafo di score d.

5) Un altro tipo di ostruzione all'esistenza di un grafo con fissato score si ottiene da una conseguenza del seguente lemma

Lemma 3. *Sia $G = (V, E)$ un grafo finito con n vertici e siano u e v due vertici di grado massimo, cioè*

$$\deg(w) \leq \deg(u)$$

$$\deg(w) \leq \deg(v), \quad \forall w \in V.$$

Allora il numero di vertici di G, diversi da u e da v, con grado almeno 2, sono almeno $\deg(u) + \deg(v) - n$:

$$|\{w \in V \setminus \{u, v\} \mid \deg(w) \geq 2\}| \geq \deg(u) + \deg(v) - n.$$

Il lemma fornisce una condizione necessaria all'esistenza di un grafo con fissato score d.

Esempio. Il vettore

$$d = (1, 1, 1, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8)$$

ha due componenti di grado massimo. Se esistesse un grafo $G = (V, E)$ di score d si avrebbero due vertici, u e v di grado massimo

$$\deg(u) = \deg(v) = 8$$

Per un tal grafo si avrebbe

$$|\{w \in V \setminus \{u, v\} \mid \deg(w) \geq 2\}| = 5$$

e

$$\deg(u) + \deg(v) - n = 8 + 8 - 10 = 6$$

Ma non è vero che $5 \geq 6$, quindi non esiste un grafo di score d.

6) Un altro lemma utile per stabilire se esista un grafo con fissato score è il seguente

Lemma 4. *Sia $d = (d_1, \dots, d_n)$ un vettore a componenti intere tali che*

$$0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_n \leq 2$$

e tali che sia soddisfatto il "lemma delle strette di mano", vale a dire che o non compaiono componenti uguali a 1 oppure il numero di componenti uguali a 1 è pari e maggiore o uguale di 2.

Si possono presentare tre diversi casi:

1) *Tra le componenti del vettore d*

- *NON compaiono componenti uguali ad 1 ed*
- *esistono UNA o DUE componenti uguali a 2*

$$d = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, 2)$$

$$d = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, 2, 2)$$

In questo caso NON esiste un grafo avente d come score.

2a) *Tra le componenti del vettore d*

- *NON compaiono componenti uguali ad 1 ed*
- *il numero m di componenti uguali a 2 o è ZERO oppure è maggiore o uguale a TRE*

$$d = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}) \qquad m = 0$$

$$d = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, \underbrace{2, \dots, 2}_{m}) \qquad m \geq 3$$

In entrambi i casi esiste un grafo avente d come score.

Nel primo caso ($m = 0$) si avrà un grafo formato da n vertici di grado zero.

Nel secondo caso ($m \geq 3$) si potrà considerare il grafo costituito da n vertici di grado zero unito ad un ciclo C_m di lunghezza m.

2b) *Tra le componenti del vettore d compaiono componenti uguali ad 1:*

$$d = (\underbrace{\begin{matrix} v_1 & \dots & v_n \\ 0, & \dots, & 0, \end{matrix}}_{n} \underbrace{\begin{matrix} q_1 & \dots & q_{2k+2} \\ 1, & \dots, & 1, \end{matrix}}_{2k+2} \underbrace{\begin{matrix} w_1 & \dots & w_m \\ 2, & \dots, & 2 \end{matrix}}_{m})$$

con $n \geq 0$, $2k + 2 \geq 2$ e $m \geq 0$.
In questo caso esiste un grafo di score d, basta prendere il grafo formato dall'unione di
• *n vertici isolati di grado 0,*
• *un cammino formato dagli eventuali vertici di grado 2, $w_1, \dots, w_m$, con agli estremi i primi due vertici di grado 1, q_1 e q_2,*
• *e infine k eventuali cammini di lunghezza 1 costituiti dai restanti vertici di grado 1, $q_3, \dots, q_{2k+2}$.*

Esempio. $d = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2)$

Condizioni sufficienti alla connessione e alla sconnessione

Il seguente lemma è una conseguenza del teorema di esistenza di un albero di copertura per i grafi connessi finiti e della formula di Eulero per gli alberi.

Lemma 5. *Sia $G = (V, E)$ un grafo finito. Se $G = (V, E)$ è connesso, allora*

$$|E| \geq |V| - 1.$$

Osservazione importante! La condizione appena espressa è solo necessaria, non sufficiente, in altre parole, il viceversa è falso! Esistono cioè grafi finiti sconnessi per i quali vale la relazione

$$|E| \geq |V| - 1.$$

Esempio. Il vettore $d = (1, 1, 2, 2, 2)$ può essere sia lo score di un grafo connesso che di un grafo sconnesso:

- un cammino di lunghezza 4 realizza un grafo connesso di score d;
- un $3-$ciclo unito ad un cammino di lunghezza 1 realizza un grafo SCONNESSO di score d e per esso vale la relazione $|E| \geq |V| - 1$ infatti $|V| = 5$ e $|E| = 4$.

La condizione necessaria alla connessione di un grafo finito, stabilita dal lemma precedente, fornisce una condizione sufficiente alla sconnessione:

Lemma 6 ("forzatura" alla sconnessione). *Sia $G = (V, E)$ un grafo finito. Se*

$$|E| < |V| - 1$$

allora G è sconnesso.

Esempio. Sia $G = (V, E)$ un grafo finito di score

$$d = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2)$$

Notiamo che applicando il teorema dello score possiamo stabilire che esiste almeno un grafo di score d.

Per G vale la relazione $|E| < |V| - 1$, infatti

$$|V| = 8 \qquad \text{e } |E| = 5$$

e vale

$$5 < 8 - 1$$

Dunque necessariamente ("per forza") G è sconnesso.

Una condizione sufficiente alla connessione è data dal seguente lemma:

Lemma 7 ("forzatura" alla connessione). *Sia $G = (V, E)$ un grafo finito e sia $n = |V|$ il numero di vertici di G. Siano*

$$d := \min \{ \deg(v) \mid v \in V\}$$
$$D := \max \{ \deg(v) \mid v \in V\}$$

Se

$$d \geq n - D - 1$$

allora G è connesso.

Esempio. Sia $G = (V, E)$ un grafo finito di score

$$e = (2, 2, 3, 3, 3, 3, 4)$$

Notiamo che applicando il teorema dello score possiamo stabilire che esiste almeno un grafo di score e.

Per G abbiamo

$$d = 2, \qquad D = 4, \qquad n = 7$$

e vale

$$2 \geq 7 - 4 - 1$$

Dunque necessariamente ("per forza") G è connesso.

Osservazione importante! La condizione appena espressa è solo sufficiente, non necessaria! Esistono cioè grafi finiti connessi per i quali NON vale la relazione

$$d \geq n - D - 1$$

Esempio. Sia $G = (V, E)$ il grafo finito di score

$$e = (1, 1, 2, 2, 2)$$

rappresentabile come un cammino di lunghezza 4. Allora G è connesso ma non vale $d \geq n - D - 1$, infatti

$$d = 1, \qquad D = 2, \qquad n = 5$$

e

$$1 \geq 5 - 2 - 1 = 2 \qquad\qquad \text{è FALSA !!!}$$